

## Un modelo poroelastoplástico de geomecánica radial

Mario César Suárez Arriaga

Consultor-Asesor Independiente, MARCE & ASOCIADOS, correo: [mcsa50@gmail.com](mailto:mcsa50@gmail.com)

### Resumen

Con base en principios generales de conservación de la masa, del *momentum* y de la Ley de Darcy, junto con el concepto de derivada advectiva de la densidad del sistema roca-fluido, se presenta el desarrollo de un modelo poroelastoplástico general en 3D. Para ilustrarlo en forma práctica, se deduce otro mucho más simple de geometría radial, el cual se aplica a la deformación poroelástica de un pozo productor. El modelo 3D se aplicó al cálculo de la deformación elastoplástica de un domo salino en una zona geotérmica de aceite del Golfo de México. El fluido y la roca del reservorio se consideran como dos medios continuos cambiantes en el espacio-tiempo. Los cambios en la roca son muy lentos y pequeños comparados con los cambios en el fluido, pero deben tomarse en cuenta al estudiar las deformaciones poroelastoplásticas. La densidad total de una roca porosa comprende la presencia del fluido de densidad  $\rho_f$  en los poros junto con la densidad de la fase sólida  $\rho_s$ . La densidad global es un promedio de ambas densidades  $\rho = \varphi\rho_f + \varphi_s\rho_s$ . Las hipótesis en este modelo son: H1) Los esfuerzos cortantes en el fluido son nulos y sólo actúa la presión de poro. H2) La densidad de la roca sólida es constante. H3) La viscosidad del fluido es constante. H4) La permeabilidad de la roca es constante. H5) La densidad del fluido sólo depende de la presión. H6) El fluido es monofásico (líquido). H7) La poroelasticidad de la roca sólo se manifiesta en el cambio de porosidad. H8) La velocidad de deformación de la roca es muy pequeña. No obstante las restricciones de estas hipótesis, el modelo radial resultante es sumamente práctico y didáctico, ayudando a comprender la mayoría de los procesos geomecánicos involucrados, incluyendo mecanismos no-isotérmicos.

*Palabras clave:* Poroelasticidad, poroelastoplásticidad, modelado matemático, Ley de Darcy, derivada advectiva, deformación, criterio de falla.

### Introducción

La literatura mundial geomecánica describe la subsidencia en acuíferos, en yacimientos de petróleo y en reservorios geotérmicos a causa de su explotación (Bundschuh & Suárez, 2010; Suárez *et al.*, 2014). Este fenómeno es una consecuencia directa de las deformaciones permanentes e irreversibles de la roca porosa. En sistemas geotérmicos mejorados (EGS) se aplica estimulación artificial para fisurar la roca aumentando porosidad y permeabilidad. La poroelasticidad sólo estudia el comportamiento de las rocas porosas elásticas con fluidos viscosos tales como agua salmuera, gas y petróleo. Una roca poroelástica se caracteriza por su porosidad, sus módulos elásticos y las propiedades físicas de los fluidos que contiene. La deformación de la roca poroelástica puede ser lineal o no lineal, isotérmica o no-isotérmica. La extracción de fluido en reservorios geotérmicos provoca la reducción de la presión interna del poro y de la apertura efectiva de poros y fisuras, deformando con frecuencia la roca en forma permanente e irreversible, o sea, poroelastoplástica.

La poroplasticidad de rocas geotérmicas, puede exhibir dilatación plástica producida por tensiones positivas o contracción plástica producida por compresiones negativas. Ambos procesos son irreversibles, produciendo deformaciones permanentes que pueden reducir la capacidad de almacenamiento del reservitorio. Hay otros efectos importantes geotermomecánicos en geotermia y en reservorios de hidrocarburos. Las altas presiones y temperaturas aumentan la ductilidad y bajan el

punto de cedencia de la roca. Por lo tanto, los efectos combinados de alta temperatura y alta presión confinante inducen flujos plásticos, produciendo deformaciones más allá del límite de deformación elástica (Bundschuh & Suárez, 2010). La teoría actual de flujo en la plasticidad (Coussy, 2004; Chin, 2005; de Souza et al., 2008) asume que existe una regla de flujo para calcular la deformación plástica de la roca. También se asume que la tensión total en rocas geotérmicas se puede descomponer en dos partes: una de ellas elástica o reversible y la otra plástica o irreversible. Esta partición puede ser aditiva o multiplicativa; ambas son útiles en la ingeniería de reservorios geotérmicos. La descomposición aditiva se utiliza en pequeñas deformaciones plásticas, aplicando la ley de Hooke a la porción elástica. La deformación total  $\epsilon$  es igual a la deformación plástica  $\epsilon_p$ , más la deformación elástica  $\epsilon_e$  ( $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$ ). La descomposición multiplicativa puede usarse para grandes deformaciones plásticas, suponiendo que el tensor del gradiente de la deformación  $F$  es igual al producto de un tensor elástico y un tensor plástico o  $F = F_e \cdot F_p$ . Para determinar la parte plástica de la deformación total en los dos tipos de descomposición, se requieren tres conceptos: una regla de flujo, un criterio de cedencia y un modelo de endurecimiento (Lee, 1969; Coussy, 2004; Souza et al., 2008; Anandarajah, 2010). La regla de flujo plástico define la evolución de la distorsión plástica; la ley de endurecimiento caracteriza la evolución del límite de cedencia según el criterio correspondiente. El objetivo principal de este artículo es introducir estos aspectos importantes de la teoría de la plasticidad aplicada a un par de ejemplos poroelastoplásticos de reservorios deformables.

### El Modelo General PoroElástico y en Coordenadas Radiales

El modelo desarrollado, cuyos detalles y nomenclatura se muestran en el Anexo, es el siguiente:

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) \right) + C_f \vec{\nabla} p \cdot \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) = \frac{1}{1-\varphi} \frac{D\varphi}{Dt} + \varphi C_f \frac{Dp}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s + \varphi C_f \frac{Dp}{Dt} \quad (1)$$

Una vez calculada la deformación de la roca, la divergencia de la velocidad del sólido puede calcularse empleando la compresibilidad del poro:  $\varphi C_p = \frac{-1}{\varphi_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial p} = \frac{-1}{1-\varphi} \frac{\partial (1-\varphi)}{\partial p} = \frac{1}{1-\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial p}$ . El modelo definido por la ecuación (1) puede escribirse con un solo coeficiente formado por ambas compresibilidades:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) \right) + C_f \vec{\nabla} p \cdot \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) = \varphi (C_p + C_f) \frac{Dp}{Dt}} \quad (2)$$

Este modelo, en coordenadas radiales o cilíndricas, deviene simplemente (ver Anexo):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k_r}{\mu_f} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{C_f}{\mu_f} k_r \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 = \varphi (C_p + C_f) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3)$$

Esta ecuación no lineal, con condiciones de frontera e inicial apropiadas, permite el cómputo de la presión del fluido  $p(r, t)$ , así como el cálculo exacto de la porosidad, suponiendo constante la compresi-

$$\text{abilidad del poro una vez calculada la presión: } \varphi(p) = \frac{\varphi_0}{(1-\varphi_0)e^{-C_p(p-p_0)} + \varphi_0}.$$

Los esfuerzos totales en rocas geotérmicas están físicamente limitados por el criterio de falla de Drucker-Prager extendido. Usando datos de campo publicados, este modelo se aplicó para computar el

possible colapso radial de un pozo productor y la deformación poroelastoplástica de un domo salino en el Golfo de México, el cual está relacionado a un acuífero geotérmico.

## El Modelo General PoroElastoPlástico

En notación tensorial para las distorsiones, el modelo aditivo elastoplástico es el siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(t), \text{ y } \boldsymbol{\varepsilon}(t_0) = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (4)$$

El punto sobre las  $\boldsymbol{\varepsilon}$  significa derivada en el tiempo; el último término en la ecuación (4) es una condición inicial para la distorsión total. Se asume que la deformación elástica del tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  se calcula con la ley de Hooke y por lo tanto lo único elemento desconocido es el tensor plástico  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ ; su cálculo soluciona el problema elastoplástico. La parte elástica puede resolverse empleando la teoría clásica de Biot en condiciones no-isotérmicas (Bundschuh & Suárez, 2010). Sea  $\Psi$  el potencial de energía libre, que se supone función de las  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y de un conjunto de variables internas  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i, i = 1, n\}$  tales como la porosidad plástica; las  $\alpha_i$  se llaman variables de endurecimiento. Se asume que ese potencial puede ser descompuesto en la suma de un elemento elástico  $\Psi_e$  y uno plástico  $\Psi_p$  (de Souza *et al.*, 2008):

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\alpha}) = \Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e) + \Psi_p(\boldsymbol{\alpha}) \quad (5)$$

La parte plástica  $\Psi_p$  describe el endurecimiento o ablandamiento de la roca. En la mecánica de la descripción se asume que las rocas geotérmicas son lineales e isotrópicas. Usando la descomposición del potencial energía libre, la ley general elástica para calcular el tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  y la fuerza termodinámica del endurecimiento  $\boldsymbol{\tau}$  es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}; \quad \boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial \Psi_p}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad (6)$$

El flujo plástico ocurre cuando la tensión alcanza un valor crítico. Este principio experimental se representa con un potencial de flujo  $Y(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$ , positivo, negativo o cero, lo cual define tres dominios diferentes:

$$\Omega_E = \{ \boldsymbol{\sigma} \mid Y(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) < 0 \}, \quad \Omega_P = \{ \boldsymbol{\sigma} \mid Y(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) \leq 0 \}, \quad \Omega_Y = \{ \boldsymbol{\sigma} \mid Y(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \} \quad (7)$$

$\Omega_E$  es el dominio elástico, donde no ocurre cedencia plástica;  $\Omega_P$  es el dominio de tensiones plásticamente admisibles y  $\Omega_Y$  es el dominio de tensiones donde la plasticidad puede ocurrir. El conjunto  $\{Y(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) > 0\}$  no tiene significado físico y se dice que ese proceso termodinámico es imposible que ocurra. La siguiente condición es la construcción de una regla de flujo plástico que define leyes de evolución para las variables internas, que se asocian con la función disipativa del proceso. Las variables internas son las  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  y el conjunto  $\boldsymbol{\alpha}$ . La regla del flujo plástico (de Souza *et al.*, 2008) se define como  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma} \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$ ;  $\mathbf{N}$  es el tensor de flujo y  $\dot{\gamma}$  es un multiplicador plástico. El modelo de endurecimiento (Coussy, 2004; de Souza *et al.*, 2008) es dado por  $\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\gamma} \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$ .  $\mathbf{H}$  es el módulo generalizado de endurecimiento, el cual define la evolución de las variables  $\alpha_i$ . Estas ecuaciones son leyes evolutivas que requieren criterios de carga/descarga, o bien, condiciones que determinen cuándo hay evolución de las distorsiones plásticas y de las variables internas. Las condiciones son tres:  $Y(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) \leq 0$ ,  $\dot{\gamma} \geq 0$ ,  $\dot{\gamma} Y(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = 0$ . En cedencia plástica  $\dot{\gamma} \neq 0$ ; una ecuación complementaria, deducida de las condiciones anteriores, implica la siguiente condición de consistencia:  $\dot{\gamma} \dot{Y}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \Rightarrow \dot{Y}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = 0$ . Las matrices  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{H}$  se computan con el potencial de flujo  $Y(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$  y el

multiplicador plástico  $\dot{\gamma}$  con la fórmula tensorial indicada (de Souza et al., 2008), donde el tensor  $\mathbf{D}_e$  es la elasticidad isotrópica, y los “:” representan el producto tensorial interno:

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = -\frac{\partial Y}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad \dot{\gamma} = \mathbf{N} : \mathbf{D}_e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} / \left( \mathbf{N} : \mathbf{D}_e : \mathbf{N} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial \mathbf{a}^2} \cdot \mathbf{H} \right) \quad (8)$$

### El Criterio de Cedencia (*yielding*) de Drucker-Prager

Este criterio (Drucker-Prager, 1952, en: Coussy, 2004; de Souza et al., 2008) establece que: “*the plastic yielding begins when the second invariant  $I_2$  of the deviatoric stress and the hydrostatic pressure  $p$ , reach a critical combination*”. El segundo invariante es una función del desviador  $s$  de la tensión:

$$I_2(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s} : \mathbf{s}}{2} = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}, \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{I}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij} \quad (9)$$

### Primer ejemplo: Modelo radial poroelástico

El modelo general construido en el Anexo, permite deducir un modelo más simple, radial de la forma:

$$C_T = (C_p + C_f) \Rightarrow \frac{k_r}{\mu_f} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + C_f \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 \right) = C_T \varphi(p) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (10)$$

Donde  $p = p(r, t)$ ,  $C_T$  es la compresibilidad total,  $\mu_f$  la viscosidad del fluido y  $k_r$  es la permeabilidad radial de la roca. Todas estas variables pueden considerarse constantes o bien dependientes únicamente de la presión. La permeabilidad  $k_r$  se aproxima con la fórmula de Pearson y la porosidad con la correlación indicada en el Anexo. Se supone un reservorio cilíndrico contenido en una roca isotrópica de espesor uniforme, parcialmente homogénea, donde las principales variables cambian con el radio. Un pozo productor (o inyector) de líquido se encuentra situado en el centro del medio poroso y toda la formación circundante se deforma por efecto de la extracción o de la inyección constante efectuada. El reservorio se encuentra sometido a las siguientes condiciones de frontera e iniciales:

1. Desplazamiento radial inicial nulo  $u_r(r, 0) = 0$
2. Desplazamiento en pozo no deformable  $u_r(r \leq r_w, t) = 0$  ( $\neq 0$ , si el pozo se deforma).
3. Desplazamiento de frontera externa  $u_r(r \geq r_E, t) = 0$  ( $\neq 0$  si esta frontera se deforma).
4. Velocidades del fluido y del sólido en  $r = r_E$ ,  $v_f = v_r = 0$  si  $u_r = 0$ .
5. Presión inicial del fluido en el reservorio  $p(r, 0) = p_i$
6. En la frontera interna en el pozo:  $\frac{\partial p(r_w, t)}{\partial r} = \frac{-q_0 \mu_f}{2\pi k_r r_w h_0}$
7. En la frontera externa del reservorio  $\partial p(r_E, t) / \partial r = 0$

Los efectos poroelásticos sobre la presión y la deformación en el reservorio contenido líquido pueden estimarse con este modelo a partir de su estado inicial. La porosidad y permeabilidad son variables debido a la distorsión radial. Se considera una producción constante de líquido y los límites externo e interno son fijos. Sea el coeficiente  $\xi_e = b / (\lambda + 2G)$ , donde  $b$  es el coeficiente de Biot-Willis,  $\lambda$  es el coeficiente drenado de Lamé y  $G$  es el módulo del esfuerzo cortante. El reservorio es sensible a la tensión o compresión: mientras mayor sea  $\xi_e$ , mayor será el desplazamiento, como se observa en las figuras 1 y 2. Usando las propiedades y valores indicados, se realizaron tres cálculos. Los resultados mostrados corresponden a 150 días ( $t_1$ ) de producción de líquido. Las figuras 1 y 2 ilustran el efecto que tiene el coeficiente  $\xi_e$  sobre el perfil de presión y el desplazamiento radial de la roca.

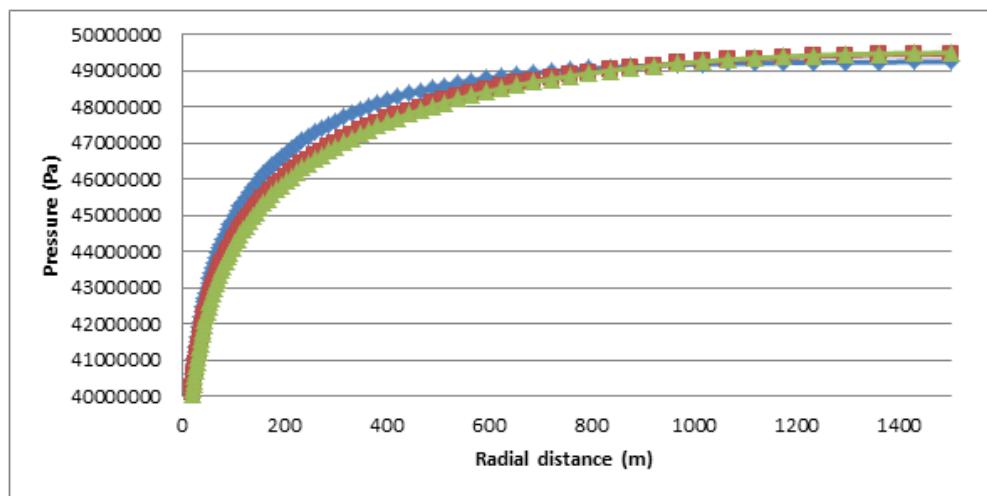


Figura 1: Efecto del coeficiente poroelástico en el perfil  $p(r, t)$  al tiempo  $t_1$ .

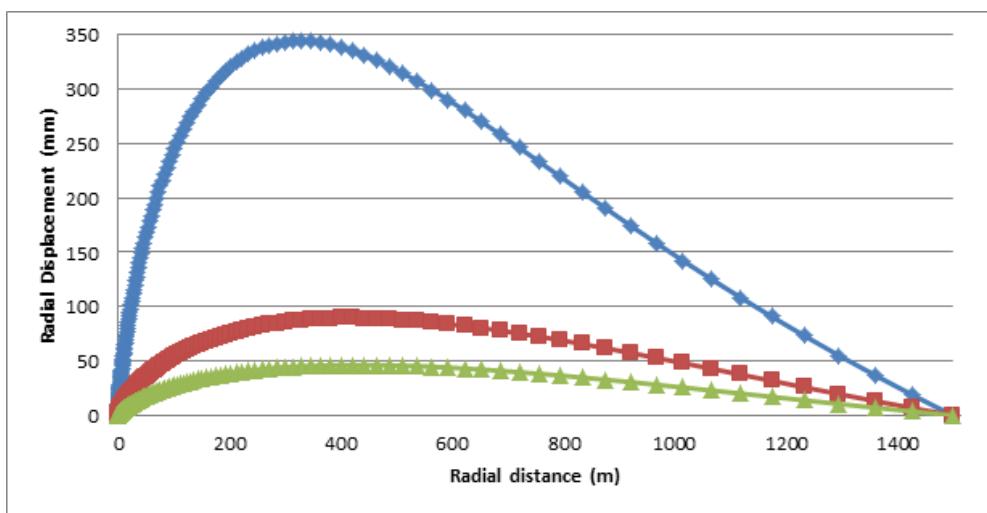


Figura 2: Efecto del coeficiente poroelástico en el desplazamiento  $u_r(r, t)$  al tiempo  $t_1$ .

### Segundo ejemplo: Deformación poroelastoplástica de un domo salino

Se ha encontrado una concentración anormalmente elevada de sales disueltas y minerales en muestras de pozos activos en yacimientos de aceite, ubicados en la parte sur del Golfo de México a 6000 m de profundidad. Esto indica la presencia de domos salinos subyacentes al reservorio. Estos domos influyen en la composición química del aceite y de salmuera caliente que acompañan a la producción. La extracción de hidrocarburos en este sitio se relaciona con fenómenos geotérmicos típicos acoplados a la geomecánica activa de los domos de sal. La migración masiva se produce en condiciones no-isotérmicas a temperaturas mínimas de 160° C y a presiones arriba de 1284 bars. El sistema geológico de interés está situado a 1000 m bajo el nivel del mar. La ubicación del reservorio se encuentra 5000 m por debajo del nivel del mar. La geometría aproximada del domo salino se muestra en la Figura 3. La profundidad total del modelo es de 7000 m, el ancho es de 8000 m y la longitud es de 8000 m. La computación de este ejemplo es sólo con fines ilustrativos, no es necesario incluir un mapa detallado del sitio real. La simulación elastoplástica adopta un criterio de cedencia de Drucker-Prager modificado que incluye el daño plástico (Shen et al., 2012). El potencial plástico  $Y_{DP}$  es, para este caso:

$$Y_{DP} = \sqrt{(\xi \sigma_{t0} t g \theta)^2 + I_2^2} - p t g \theta \quad (11)$$

$\xi$  es un parámetro que define la excentricidad de la superficie de carga en los esfuerzos efectivos;  $\sigma_{t0}$  es el umbral del esfuerzo tensional en el cual inicia el flujo plástico;  $\theta$  es el ángulo de dilatancia;  $I_2$  es el segundo invariante del meridiano compresivo y  $p$  es la presión. El criterio de falla de Drucker-Prager modificado es una generalización del criterio clásico de Mohr-Coulomb.

Para simular la deformación del domo causada por la extracción de aceite y salmuera, utilizamos el modelo 3D descrito por Shen, Bai & Standifird (2012). El modelo incluye un análisis de deformación visco-elasto-plástica y el flujo del fluido relacionadas con el declive de presión. El modelo fue resuelto mediante el método de elementos finitos. La simulación numérica adopta el criterio de Drucker-Prager, que incluye plasticidad y daño plástico discutido previamente. En la ley de flujo  $\dot{\varepsilon}_{cr} = A (\bar{\sigma}_{cr})^n t^m$ , los parámetros tienen los siguientes valores:  $A = 10^{-21.8}$ ;  $n = 2.667$ ;  $m = -0.2$ . La fuerza cohesiva y ángulo del modelo (Shen *et al*, 2012) están dados por:  $d = 1.56$  MPa,  $\theta = 44^\circ$ . La densidad, módulo de Young y coeficiente de Poisson del reservorio son  $2200$  kg/m<sup>3</sup>,  $0.9 \times 10^{10}$  Pa y  $0.34$ , respectivamente. Los valores respectivos para el domo son  $2100$  kg/m<sup>3</sup>,  $1.5 \times 10^{10}$  Pa y  $0.30$ , respectivamente. La variación de la presión de poro en el reservorio es debida a la extracción de aceite. Va desde su valor original de  $82$  MPa a  $70$  MPa, que es un valor normal de decaimiento de presión (120 bar). Las cargas aplicadas al modelo a escala del campo incluyen: presión del agua de mar, gravedad de la formación y de la sal, que se equilibra con la geotensión inicial. Se considera desplazamiento cero en las cuatro zonas laterales y en la parte inferior (Figura 3). En la simulación se incluyó la producción de aceite cubriendo un periodo entre enero de 1992 con  $5000$  bpd (barriles por día),  $80,000$  bpd en julio de 2004 y hasta diciembre de 2010 con  $15,000$  bpd, distribuidos entre 19 pozos productores. La Figura 4 muestra el perfil de presión calculada.

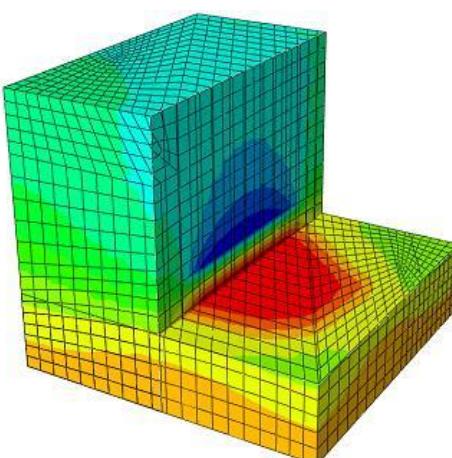
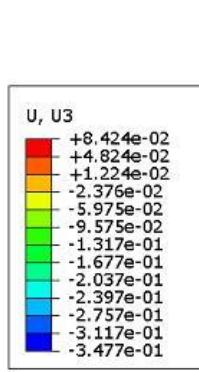


Figura 3: Contorno del desplazamiento/expansión vertical ( $U_3$ ) del domo salino por la producción.

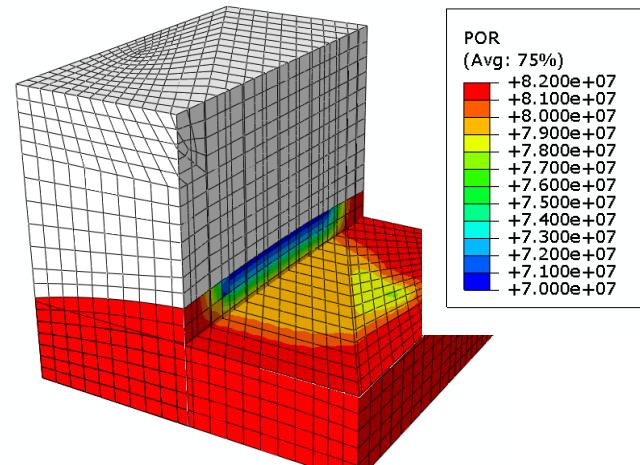


Figura 4: Contorno de la variación de la presión de poro por la extracción entre 1992 y 2010.

## Discusión y conclusiones

- En este artículo presenté el problema general de elastoplasticidad de rocas geotérmicas. Introduje una breve descripción de la teoría del flujo plástico y se desarrollaron y resolvieron dos ejemplos de aplicación. El primer ejemplo aplica un modelo general poroelástico y un caso particular simplificado

cuando el sistema tiene geometría radial con flujo en un medio isotrópico. Los resultados numéricos presentados muestran gráficamente el efecto que la poroelasticidad tiene sobre el perfil de presión y el desplazamiento radial de la roca. Estos resultados pueden ampliarse al estudio numérico del colapso de pozos. Como puede verse en las figuras 1 y 2, si el coeficiente  $\xi_e$  aumenta, entonces el desplazamiento radial aumenta con menor caída de presión. Para el caso donde los límites del reservorio quedan fijos, en la frontera exterior la presión es mayor y el desplazamiento radial es menor. Se observa en la Figura 2 que el máximo desplazamiento radial es de 0.350 m y ocurre a los 300 m de distancia del pozo.

- En el segundo ejemplo se resuelve un problema tridimensional poroelastoplástico, correspondiente a la deformación permanente de un domo salino situado en el Golfo de México, relacionado con un yacimiento de petróleo en explotación. Este caso involucra fenómenos geotérmicos típicos acoplados a la extracción de aceite con invasión de salmuera caliente. El domo experimenta una expansión continua visco-elasto-plástica originada por la extracción y depresión correspondiente. Se modeló la geomecánica de esta distorsión usando el criterio de Drucker-Prager modificado y elementos finitos. La expansión máxima calculada es de 0.348 metros en la parte superior del domo. Esta deformación afecta el perfil de presión de poro según se aprecia en la Figura 4. La disminución de la presión está limitada a la región del reservorio definida en la misma Figura 4. Los valores de presión de poro permanecen sin cambios en las regiones más allá del yacimiento al establecer condiciones de muy baja permeabilidad.

## Referencias

- Anandarajah, A., 2010. *Computational Methods in Elasticity and Plasticity*. Springer, 633 p.
- Bundschuh, J., and Suárez-Arriaga, M.C., 2010. *Introduction to the Numerical Modeling of Groundwater and Geothermal Systems - Fundamentals of Mass, Energy and Solute Transport in Poroelastic Rocks*. Taylor & Francis Group, 479 p.
- Chin, L.Y., Raghavan, R., and Thomas, L.K., 2000. Fully Coupled Geomechanics and Fluid-Flow Analysis of Wells with Stress -Dependent Permeability. *SPE Journal*, 5:1, pp. 32-45.
- Coussy, O., 2004. *Poromechanics*. Ed. John Wiley & Sons, Ltd.
- De Souza, E.A.N., Peric, D., and Owen, D.R.J., 2008. *Computational Methods for Plasticity*, Ed. John Wiley & Sons, Ltd., 791 pp.
- Lee, E.H., 1969. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36:1, pp. 1-6.
- Shen, X., Bai, M., and Standifird, W., 2012. *Drilling and Completion in Petroleum Engineering – Theory and numerical applications*. Volume 3, Multiphysics Modeling series, Taylor & Francis Group, 233 p.
- Suárez, M.C., Samaniego, V.F., and Shen, X., 2014. Salt domes deformation coupled to the flow of geothermal brine and oil. *Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Conference of the International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG)*, Kyoto, Japan, September 22-25, 2014.

(Anexo Técnico en páginas siguientes)

## Anexo Técnico

### A.1. La derivada advectiva de la densidad

El fluido y la roca del reservorio se suponen como dos medios continuos evolucionando en el espacio-tiempo. Los cambios en la roca son muy lentos y pequeños comparados con los cambios en el fluido, pero deben tomarse en cuenta para estudiar las deformaciones poroelásticas. La derivada advectiva de la densidad de la fase fluida o sólida es la tasa de cambio global en el tiempo (derivada convectiva o total) de la densidad de la fase considerada como una función de cuatro variables  $\rho(x, y, z, t)$ . Esta derivada total  $D\rho/Dt$  se computa así:

$$\frac{D\rho}{Dt}(x, y, z, t) = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{v} \quad (\text{A1})$$

Donde  $\vec{v} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$  y  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

El vector  $\vec{v}$  es el campo de velocidades de la fase roca o fluido y  $\vec{r}(t)$  es la posición de cualquier partícula del medio. De la fórmula anterior se deduce que la derivada advectiva se origina porque la densidad de la fase cambia con el tiempo experimentando una variación espacial por el movimiento de partículas de la fase fluida o sólida. Si  $\vec{v} = \mathbf{0}$  o el gradiente de la densidad es nulo, entonces  $D\rho/Dt$  es igual a la derivada temporal tradicional.

### A.2. El Principio de Conservación de la Masa en Rocas Porosas

La densidad total de la roca debe tomar en cuenta la presencia del fluido ( $\rho_f$ ) en los poros junto con la fase sólida ( $\rho_s$ ). La densidad global es un promedio de ambas densidades  $\rho = \varphi \rho_f + \varphi_s \rho_s$ . La masa total  $M = M_f + M_s$  es la suma de las masas de ambas fases en el tiempo  $t \geq 0$ . Las definiciones matemáticas son (Bundschuh y Suárez Arriaga, 2010):

$$\text{masa sólida: } M_s = \int_{V_s} \varphi_s \rho_s(\vec{r}, t) dV, \quad \text{masa fluida: } M_f = \int_{V_f} \varphi \rho_f(\vec{r}, t) dV \quad (\text{A2})$$

Sea  $\vec{v}_i = \partial \vec{r} / \partial t$  la velocidad vectorial de una partícula en el volumen de la fase  $V_i$  ( $i = f, s$ );  $\varphi_s = V_s / V_B$  es la fracción de granos sólidos con respecto al volumen global de roca porosa  $V_B$  y  $\varphi_f = \varphi = V_p / V_B$  es la fracción de poros interconectados o porosidad de la roca en el volumen  $V_B$ . Por esa misma definición tenemos que  $\varphi_s + \varphi = 1$ . La densidad total de la roca porosa es entonces:  $\rho = \varphi \rho_f + (1 - \varphi) \rho_s$ . La masa permanece constante al conservarse durante el movimiento, y la derivada advectiva  $D/Dt$  de cada una de las integrales en la ecuación (2) es cero:

$$\frac{DM_i}{Dt} = \int_{V_i} \left( \frac{\partial(\varphi_i \rho_i)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\varphi_i \rho_i \vec{v}_i) \right) dV = 0 \quad (\text{A3})$$

Esta es la forma integral del principio de conservación de la masa para una roca porosa continua. Suponiendo que  $V_i$  representa cualquier volumen arbitrario de la fase  $i$ , el integrando de la ecuación (3) debe ser cero:

$$\frac{\partial(\varphi_i \rho_i)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\varphi_i \rho_i \vec{v}_i) = \frac{D(\varphi_i \rho_i)}{Dt} + (\varphi_i \rho_i) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = \frac{\partial(\varphi_i \rho_i)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\varphi_i \rho_i) \cdot \vec{v}_i + (\varphi_i \rho_i) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = 0 \quad (\text{A4})$$

La fórmula (4) es la ecuación de continuidad o Principio de Conservación de la Masa en derivadas parciales. La divergencia de la velocidad del fluido es la derivada advectiva del volumen específico del fluido  $v_f = 1/\rho_f$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f = \frac{-1}{\varphi \rho_f} \frac{D(\varphi \rho_f)}{Dt} = - \frac{V_B \mathbb{V}_f}{\mathbb{V}_f \mathbb{M}_f} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\mathbb{M}_f}{V_B} \right) = \frac{1}{V_B} \frac{DV_B}{Dt} = \frac{DE_B}{Dt} \quad (\text{A5})$$

Aplicando el mismo razonamiento a la fase sólida ( $i = s$ ) de masa constante:

$$\frac{D}{Dt}(\varphi_s \rho_s) = -(\varphi_s \rho_s) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s = \frac{-1}{\varphi_s \rho_s} \frac{D(\varphi_s \rho_s)}{Dt} = -V_s \frac{D}{Dt} (V_s)^{-1} = V_s \left( V_s^{-2} \frac{DV_s}{Dt} \right) = \frac{1}{V_s} \frac{DV_s}{Dt}$$

La divergencia de la velocidad del sólido es la derivada advectiva de la deformación volumétrica del sólido:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{y_0 z_0 \Delta x + x_0 z_0 \Delta y + x_0 y_0 \Delta z}{x_0 y_0 z_0} = \frac{\Delta V_s}{V_s} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s = \frac{1}{V_s} \left( \frac{DV_s}{Dt} \right) = \frac{D\varepsilon_s}{Dt} \quad (\text{A6})$$

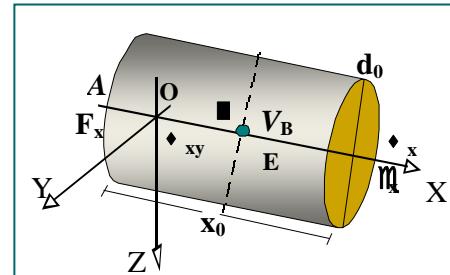
La variable  $\varepsilon_s = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$  es la deformación volumétrica (dilatación o compactación) de la fase sólida. La misma definición se aplica a la deformación volumétrica global  $\varepsilon_B = \Delta V_B / V_B$  de la roca porosa.

### A.3. Ecuaciones Elásticas para Rocas Hookeanas

Las ecuaciones de los sólidos elásticos simples sin porosidad relacionan esfuerzos y deformaciones como una función lineal tensorial. En este caso el volumen es el sólido  $V_B = V_s$  y  $\varepsilon_B = \varepsilon_s$ , porque no hay poros. Cuando las relaciones tensoriales entre esfuerzo y deformación son lineales, la roca sólida se dice que es Hookeana, porque obedece a la Ley Elástica de Hooke. En un sistema inercial de referencia OXYZ en tres dimensiones, estas relaciones son:

$$\text{tensiones: } \boldsymbol{\sigma}_s = \lambda \varepsilon_B \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}_s \Leftrightarrow \text{deformaciones: } \boldsymbol{\varepsilon}_s = -\frac{\nu \sigma_{kk}}{E} \mathbf{I} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_s \quad (\text{A7})$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3 \sigma_M = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_s = 3 K_B \varepsilon_s \quad (\text{A8})$$



Donde  $E$  es el módulo elástico de Young, el parámetro  $\nu$  es el módulo de Poisson,  $K_B$  es el *bulk modulus* o módulo volumétrico. Su inverso es la compresibilidad de la roca  $C_B = 1/K_B$ . Por último,  $G$  es el coeficiente de rigidez o módulo de Lamé, o coeficiente de corte (*shear coefficient*). El otro módulo de Lamé,  $\lambda$ , expresa la respuesta de la roca a la tensión o compresión. Sea  $\mathbf{u}_s = (u_x, u_y, u_z)$  el vector del desplazamiento de las partículas sólidas. Usando notación tensorial, las componentes de la matriz simétrica anterior para rocas isotrópicas son:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_s \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad i, j = x, y, z \quad (\text{A9})$$

Los once símbolos empleados en el modelo son de uso común:  $\sigma_{ij}$  representa las seis tensiones aplicadas [Pa];  $\varepsilon_{ij}$  son las seis deformaciones [ad], que describen la respuesta elástica global del sólido. Los coeficientes  $\lambda$ ,  $G$ ,  $E$  y  $\nu$  quedaron definidos;  $\delta_{ij}$  es el tensor unitario o de Kroenecker ( $\delta_{ii} = 1$ ,  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ );  $\sigma_M$  es la tensión promedio. El término  $\varepsilon_s = \varepsilon_B = \varepsilon_{kk}$  es la deformación volumétrica de la roca sólida y  $\sigma_{kk} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$  es la traza del tensor de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}_s$ . Estos tensores  $\boldsymbol{\sigma}_s$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$  son simétricos a consecuencia de la Segunda Ley de Newton aplicada a la dinámica de sólidos (Bundschuh y Suárez Arriaga, 2010).

### A.4. La Ley de Darcy generalizada para el movimiento del fluido relativo al sólido

Debido a que la roca puede deformarse por efectos de los cambios de presiones tanto en los granos sólidos como en el fluido contenido en los poros, es necesario formular las ecuaciones de flujo del fluido, que es lineal y laminar, con referencia al flujo o deformación de la roca sólida. La Ley de Darcy en este caso se escribe:

$$\varphi (\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) \quad (\text{A10})$$

Donde  $v_f$ ,  $v_s$  son las velocidades promedio de las partículas del fluido y del sólido respectivamente con respecto a un referencial inercial OXYZ arbitrario;  $\mathbf{K}$  es el tensor de permeabilidad absoluta de la roca;  $p$  y  $\rho_f$  son la presión y la densidad del fluido, respectivamente;  $\mu_f$  es la viscosidad dinámica del fluido.

#### A.5. Momento lineal de los esfuerzos en la roca elástica

La Segunda Ley de Newton en rocas elásticas establece que la suma de esfuerzos es igual a la aceleración:

$$\vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_s - p \mathbf{I}) = \rho_s \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A11})$$

La ecuación (13) viene de la forma integral de la Segunda Ley de Newton para sólidos. Es cero porque se supone que las partículas sólidas se mueven muy despacio, a velocidad casi constante (Bundschuh y Suárez Arriaga, 2010).

#### A.6. Modelo final resultante con flujo darciano acoplado a la roca elástica

Las ecuaciones y principios antes mencionados permiten plantear en forma lógica y clara el modelo propuesto al inicio de este artículo.

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial(\varphi \rho_f)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\varphi \rho_f \vec{v}_f) = \frac{D(\varphi \rho_f)}{Dt} + (\varphi \rho_f) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_f = 0 \quad (\text{masa del fluido, Ec. 4}) \\ b) \quad & \frac{\partial(\varphi_s \rho_s)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\varphi_s \rho_s \vec{v}_s) = \frac{D(\varphi_s \rho_s)}{Dt} + (\varphi_s \rho_s) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s = 0 \quad (\text{masa de la roca, Ec. 4}) \\ c) \quad & \varphi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -\frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) \quad (\text{Ley de Darcy relativa a la roca, Ec. 12}) \\ d) \quad & \boldsymbol{\sigma}_s = \lambda_s \boldsymbol{\varepsilon}_s \mathbf{I} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (\text{Ley de Hooke para la roca sólida, Ec. 9}) \\ e) \quad & \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_s - p \mathbf{I}) = \rho_s \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (2^{\text{da}} \text{ Ley de Newton, dinámica de la roca, Ec. 13}) \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

Este es un modelo general tridimensional, donde las principales funciones han sido definidas. Otros símbolos empleados se describen a continuación:

$$\varphi_s = 1 - \varphi; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad \vec{\nabla} \cdot (\varphi_s \rho_s \vec{v}_s) = \vec{\nabla} \varphi_s (\rho_s \vec{v}_s) + \vec{\nabla} \rho_s (\varphi_s \vec{v}_s) + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s (\varphi_s \rho_s)$$

$$\text{La derivada adveciva o total del fluido: } \frac{D(\rho_f)}{Dt} = \frac{\partial(\rho_f)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho_f) \cdot \vec{v}_f$$

$$\text{permeabilidad: } \mathbf{K} = k_i e_i \otimes e_i; \quad \text{divergencia de esfuerzos: } \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_s - p \mathbf{I}) = \partial_i e_i \otimes e_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ij} e_i \otimes e_i - \vec{\nabla} p \quad (\text{A13})$$

$$\text{donde: } k_i = k(\varphi) = 10^{(13.614\varphi - 1.8126)} \times 0.987 \times 10^{-15} \quad [\text{m}^2] \quad \text{es la ecuación de Pearson , 1976.}$$

Las hipótesis que simplifican este modelo son:

- H1) Los esfuerzos cortantes en el fluido son nulos, por tanto solo actúa la presión de poro.
- H2) La densidad de la roca sólida es constante. H3) La viscosidad del fluido es constante.
- H4) La permeabilidad de la roca es constante. H5) La densidad del fluido solo depende de la presión.
- H6) El fluido es monofásico (líquido). H7) La poroelasticidad de la roca se ve en el cambio de porosidad.
- H8) La velocidad de deformación de la roca es muy pequeña y casi despreciable en algunas ecuaciones.

### A.7. Consecuencias de las hipótesis en el modelo final

Las consecuencias de las hipótesis anteriores en el modelo son: De la ecuación (6) y de la (14.b):

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial t} + \varphi_s \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s + \vec{v}_s \cdot \vec{\nabla} \varphi_s = \frac{D\varphi_s}{Dt} + \varphi_s \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s = \frac{-1}{\varphi_s} \frac{D\varphi_s}{Dt} = \frac{1}{1-\varphi} \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{D\varepsilon_s}{Dt} = \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \varepsilon_s \cdot \vec{v}_s \quad (\text{A14})$$

De la Ley de Darcy (14.c) y de la conservación de la masa fluida (14.a):

$$\begin{aligned} \rho_f \varphi \vec{v}_f &= \rho_f \varphi \vec{v}_s - \rho_f \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \varphi \vec{v}_f) = \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \varphi \vec{v}_s) - \vec{\nabla} \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) \right) \\ &\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) \right) + \frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} \rho_f \cdot \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) - \frac{1}{\rho_f} \vec{\nabla} \cdot (\rho_f \varphi \vec{v}_s) = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial (\rho_f \varphi)}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

De la definición de compresibilidad del fluido y de la regla de la cadena para derivadas compuestas:

$$C_f = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial p}; \quad \vec{\nabla} \rho_f(p) = \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \vec{\nabla} p; \quad \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A16})$$

Combinando algebraicamente las ecuaciones (16) y (17):

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) \right) + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \vec{\nabla} p \cdot \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) = \frac{D\varphi}{Dt} + \varphi C_f \frac{Dp}{Dt} + \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s \quad (\text{A17})$$

Finalmente de las ecuaciones (15) y (18) obtenemos el modelo final:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) \right) + C_f \vec{\nabla} p \cdot \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) &= \frac{D\varphi}{Dt} + \varphi C_f \frac{Dp}{Dt} + \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s = \\ &= \frac{D\varphi}{Dt} + \frac{\varphi}{1-\varphi} \frac{D\varphi}{Dt} + \varphi C_f \frac{Dp}{Dt} = \frac{1}{1-\varphi} \frac{D\varphi}{Dt} + \varphi C_f \frac{Dp}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s + \varphi C_f \frac{Dp}{Dt} \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

Una vez calculado el tensor de la deformación de la roca, la divergencia de la velocidad del sólido puede calcularse empleando la última parte de la ecuación (15), o la compresibilidad del poro:

$$\varphi C_p = \frac{-1}{\varphi_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial p} = \frac{-1}{1-\varphi} \frac{\partial (1-\varphi)}{\partial p} = \frac{1}{1-\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial p} \quad (\text{A19})$$

De aquí y de la ecuación (15) deducimos que:

$$\frac{D\varepsilon_s}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_s = \frac{1}{1-\varphi} \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{1}{1-\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} = \varphi C_p \frac{Dp}{Dt} \quad (\text{A20})$$

Si ambos lados de esta ecuación dependen únicamente de la presión, entonces puede resolverse independientemente de las anteriores. Por tanto el modelo de la ecuación (19) puede igualarse a un coeficiente formado por ambas compresibilidades, la del fluido y la del poro:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) \right) + C_f \vec{\nabla} p \cdot \frac{\mathbf{K}}{\mu_f} \cdot (\vec{\nabla} p - \rho_f \vec{g}) = \varphi (C_p + C_f) \frac{Dp}{Dt}} \quad (A21)$$

### A.8. Escritura del Modelo en Coordenadas Cilíndricas y Radiales

Los operadores diferenciales en coordenadas cilíndricas para funciones arbitrarias son:

$$u(r, \theta, z); \quad \vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z); \quad \boldsymbol{\sigma}(r, \theta, z)$$

**Gradiente de la función  $u$ :**  $\vec{\nabla} u = \left( \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial z} \right); \quad \nabla_r u = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \nabla_\theta u = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \nabla_z u = \frac{\partial u}{\partial z}$

**Divergencia del vector  $v$ :**  $\text{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

**Divergencia del tensor  $\sigma$ :**  $\boldsymbol{\sigma}(r, \theta, z) = \sigma_{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e_\beta = (\sigma_r) \Rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r}, \quad \sigma_\theta = \sigma_z = 0$

Debido a que sólo existe la componente radial, los demás términos son nulos. Así, la ecuación diferencial del modelo se simplifica con la pura coordenada radial  $r$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k_r}{\mu_f} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{C_f}{\mu_f} k_r \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 = \varphi (C_p + C_f) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (A22)$$

Suponiendo que la permeabilidad, la viscosidad y las compresibilidades son constantes:

$$\boxed{\frac{k_r}{\mu_f} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + C_f \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2 \right) = (C_p + C_f) \varphi(p) \frac{\partial p}{\partial t}} \quad (A23)$$

A esta última ecuación faltan por agregar las condiciones de frontera y la condición inicial. Con estas, la solución de la ecuación (A23) permite el cómputo de la presión del fluido  $p(r, t)$ . Por otra parte, la ecuación (A19) puede integrarse exactamente para calcular la porosidad, suponiendo constante la compresibilidad del poro una vez calculada la presión:

$$\varphi C_p = \frac{1}{1-\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial p} \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varphi(1-\varphi)} = C_p \int_{p_0}^p dp = \ln \left( \frac{\varphi}{1-\varphi} \right)_{\varphi_0}^{\varphi} = \ln \left( \frac{1-\varphi}{\varphi_0} \right)_{1-\varphi_0}^1 = C_p (p - p_0) \quad (A24)$$

por lo tanto:  $\frac{\varphi}{1-\varphi} = \frac{\varphi_0}{1-\varphi_0} e^{C_p(p-p_0)} \Rightarrow \boxed{\varphi(p) = \frac{\varphi_0 e^{C_p(p-p_0)}}{1 - \varphi_0 + \varphi_0 e^{C_p(p-p_0)}} = \frac{\varphi_0}{(1-\varphi_0)e^{-C_p(p-p_0)} + \varphi_0}}$