

Correlaciones para el factor Z en una nueva seudo presión normalizada para el análisis de pruebas transitorias de presión en pozos de puro vapor

Mario César Suárez Arriaga, Leonardo David Saucedo León y Jennifer López Chacón

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Morelia, Mich. Correos: mcsa50@gmail.com, jan.yannn@gmail.com

Resumen

Cuando alguna parte de un reservorio geotérmico sólo está en fase gaseosa o cuando el volumen de drenado de un pozo contiene puro vapor, no pueden emplearse directamente las ecuaciones de presión basadas en el modelo de Theis. Esto se debe a la alta compresibilidad del vapor y a que todas sus propiedades termodinámicas dependen de la presión y de la temperatura. Esto significa que las ecuaciones diferenciales del modelo más simple devienen no lineales. Hay tres formas de tratar este problema. La primera consiste en emplear un modelo extendido para dos fases considerando una saturación máxima de la fase gaseosa muy cercana a uno ($S_v = 0.999$), para que la mezcla bifásica prácticamente contenga sólo vapor. La segunda consiste en resolver las ecuaciones diferenciales directamente por métodos numéricos no lineales. La tercera consiste en considerar que el vapor es un gas real y utilizar un modelo que lo incluya como tal. El factor Z se define como el cociente del volumen ocupado por un gas real entre el volumen ocupado por un gas ideal a las mismas condiciones (p, T). Sin embargo, Z no es constante y depende precisamente de esas condiciones para diferentes gases. Su dependencia puede establecerse en términos de su presión y la temperatura críticas del vapor son $p_c = 221.15$ bar y $T_c = 647.27^\circ\text{K}$, y su densidad crítica es $\rho_c = 315.46 \text{ kg/m}^3$. A condiciones de reservorio a 300°C y 50 bar, la Z del vapor vale 0.902; a 100 bar, Z = 0.776, mientras que a 150 bar, Z = 0.56; en promedio parece ser que el factor Z disminuye al aumentar la presión. Bajo condiciones termodinámicas dadas de Z (p, T) se puede formular la ecuación diferencial del flujo radial, definiendo previamente una seudo presión normalizada del gas real, la cual depende también de su viscosidad dinámica. En este artículo presentamos esta formulación completa, así como la técnica numérica más adecuada para resolverla, incluyendo una nueva correlación para computar en forma práctica el factor Z.

Palabras clave: Factor de compresibilidad Z, modelado de yacimientos, ecuaciones diferenciales no lineales, simulación numérica.

Correlations for the Z compressibility factor in a new normalized seudo-pressure for the analysis of transient pressure tests in pure-steam wells

Abstract

When one part of the geothermal reservoir has only a gas phase or when the drain volume of a well contains pure steam, the traditional pressure equations which are based on the Theis model, cannot be used directly. This is due to the high compressibility of the steam and to the fact that all the steam thermodynamic properties depend on pressure and temperature (p, T). This means that the differential equations of the simplest model become nonlinear. There are three ways to address this problem. The first is to use an extended two-phase model by considering a maximum saturation of the gas phase very close to one ($S_v = 0.999$); in this way, the two-phase mixture practically contains only steam. The second one is to solve directly the differential equations using nonlinear numerical methods. The third one is to consider the vapor as a real gas and use a model which includes the vapor with this

characteristic. The Z compressibility factor is defined as the ratio of the volume occupied by a real gas to the volume occupied by an ideal gas at the same (p, T) conditions. However, Z is not constant and depends on those conditions for different gases. Its dependency can be established in terms of its reduced pressure and reduced temperature, which are defined as $p_r = p/p_c$ and $T_r = T/T_c$, where the critical pressure and critical temperature of steam are $p_c = 221.15$ bar and $T_c = 647.27^\circ\text{K}$, its critical density is $\rho_c = 315.46 \text{ kg/m}^3$. Under reservoir conditions at 300°C and 50 bar, the Z factor of steam is 0.902; at 100 bar, Z = 0.776, while at 150 bar, Z = 0.56; on average it seems that the Z factor decreases with pressure. Under given thermodynamic conditions of Z (p, T) the radial flow differential equation can be formulated by defining a normalized seudo pressure of the real gas, which also depends on its dynamic viscosity. In this paper we present this complete formulation and the most appropriate numerical technique to solve it, including a new correlation to compute approximately the Z factor.

Keywords: Compressibility factor Z, reservoir modeling, non-linear partial differential equations, numerical simulation.

INTRODUCCIÓN

Pruebas de presión transitorias en pozos de vapor (PPTv)

Cuando una parte del reservorio geotérmico o cuando el volumen de drene de un pozo contiene sólo vapor, no pueden emplearse directamente las ecuaciones de la presión de modelos como el de Theis (1935) o el de Garg (1980). Una síntesis de estos modelos se publica en las memorias de este mismo congreso (Suárez y Ruiz, 2013). Esto se debe a la alta compresibilidad de los gases y a que todas las propiedades termodinámicas del vapor dependen de la presión y de la temperatura. Esto significa que las ecuaciones diferenciales del modelo más simple, devienen no lineales. Hay tres formas de tratar este problema. La primera consiste en emplear el modelo extendido de Garg (1980) considerando una saturación y una calidad máximas de gas, muy cercanas a uno ($S_v = 0.999$), para que la mezcla bifásica prácticamente contenga sólo vapor. La segunda consiste en resolver las ecuaciones diferenciales directamente por métodos numéricos no lineales (Bundschuh y Suárez, 2010). La tercera consiste en considerar que el vapor es un gas que obedece a la siguiente ley de los gases reales, válida para cualquier fluido:

$$pV = Z N_m RT \Leftrightarrow p v = Z RT \quad (1)$$

donde V es el volumen de vapor en m^3 , Z [ad] es el factor de compresibilidad del vapor, N_m es el número de moles presentes en el vapor, $R = 8.314472 \text{ J/mol}^\circ\text{K}$ es la constante del gas ideal, T es la temperatura absoluta en $^\circ\text{K}$ y $v = V/N_m$ es el volumen molar. La presión p del vapor es la absoluta y es dada en pascales o J/m^3 .

El factor Z se define como el cociente del volumen ocupado por un gas real entre el volumen ocupado por un gas ideal a las mismas condiciones termodinámicas. Sin embargo, Z no es constante y depende precisamente de (p, T) para diferentes gases. En la Figura 1 se muestra esta dependencia en términos de la presión y la temperatura reducidas (p_r, T_r) que, acorde con el principio de estados correspondientes, es válida para todos los fluidos y son definidas como $p_r = p/p_c$ y $T_r = T/T_c$, donde $p_c = 221.15$ bar y $T_c = 647.27^\circ\text{K}$ son la presión y temperatura críticas del vapor. El volumen crítico correspondiente es $v_c = 0.00317 \text{ m}^3/\text{kg}$, que equivale a la densidad crítica $\rho_c = 315.46 \text{ kg/m}^3$. Bajo estas condiciones se puede linearizar aproximadamente la ecuación diferencial del flujo radial en el modelo de Theis, la cual solamente es válida para fluidos ligeramente compresibles:

$$p(r,t) = p_i + \frac{Q_v \mu_f}{4 \pi b_a k} E_1 \left(\frac{r^2}{4 \eta_H t} \right); \quad \eta_H = \frac{k}{\varphi \mu_f C_f} \quad (2)$$

Para linearizar la ecuación (2) se define previamente la seudo presión de un gas real (Al-Hussainy & Ramey, 1966; Horne, 1995):

$$m(p) = 2 \int_{p_0}^p \frac{p}{Z \mu(p, T)} dp \quad (3)$$

Donde p es la presión correspondiente a la prueba y p_0 es una presión arbitraria que se escoge como la mínima entre los datos de la prueba. La viscosidad dinámica $\mu(p, T)$ del vapor no es estrictamente constante y se requiere la ecuación de estado del vapor para calcular la integral anterior. La ecuación diferencial radial en términos de la seudo presión es (Horne, 1995; Suárez, 2013):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_v} \frac{\partial m(p)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 m(p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial m(p)}{\partial r} \\ m(p(r, t)) &> 0 \\ \eta_v(p) &= \frac{k}{\varphi \mu(p) C_t(p)} \end{aligned} \quad \boxed{\begin{aligned} \text{condición inicial: } p(r, 0) &= p_i, \forall r \geq 0 \\ \text{frontera externa: } \lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) &= p_i, \forall t > 0 \\ \text{frontera interna: } \lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) &= -\frac{Q_v \mu_v}{2 \pi b_a k} \end{aligned}} \quad (4)$$

Esta ecuación diferencial es no lineal debido a que el coeficiente de difusividad del vapor $\eta_v(p)$ depende precisamente de la presión a través de la viscosidad y de la compresibilidad total que incluye a la del vapor. Sin embargo en las PPTv en pozos de gas, se considera que ambas variables son aproximadamente constantes en intervalos cortos de tiempo y se pueden ir actualizando conforme transcurre la prueba. También se puede usar un valor promedio de ambas en el rango termodinámico que abarque la prueba, entre la presión inicial y la final como primera aproximación. El problema práctico es entonces el cálculo efectivo de la integral que define a la seudo presión. Si el vapor se trata como un gas ideal, el producto $Z \mu$ es constante y entonces la integral se resuelve exactamente:

$$m(p) = \frac{2}{Z \mu} \int_{p_0}^p p dp = \frac{1}{Z \mu} (p^2 - p_0^2) \quad (5)$$

Por esta razón hace algunos años se usaba la p^2 como la seudo presión y se aplicaba toda la teoría clásica a esta función graficando rectas semilog y log-log con la función p^2 . En geotermia no es necesario utilizar esta aproximación. Actualmente se cuenta con una seudo presión normalizada definida así:

$$m_n(p) = p_0 + \frac{Z_0 \mu_0}{p_0} \int_{p_0}^p \frac{p}{Z \mu(p, T)} dp; \quad t_{pn} = \mu_0 C_{t0} \int_{p_0}^p \frac{dt}{\mu_0 C_t(p, T)} \quad (6)$$

Donde m_n y t_{pn} son la seudo presión y el tiempo normalizados; el subíndice 0 significa que la función correspondiente se evalúa a las condiciones iniciales de la prueba a la presión p_0 . Estas definiciones (Meunier *et al.*, 1987; Horne, 1995) permiten tratar las PPTv en pozos de vapor casi exactamente como

se hace con los pozos de líquido comprimido y todas las relaciones descritas en Suárez y Ruiz (2013) se aplican igual, casi sin modificaciones, utilizando la ecuación de estado del vapor. En geotermia no es necesario el uso del seudo tiempo normalizado, debido a que este sólo es útil en el caso de gases a baja presión. Por tanto los análisis de PPTv con vapor pueden hacerse en tiempo real.

LA ECUACIÓN DE ESTADO DE VAN DER WAALS

Se supone que en un gas ideal no hay interacciones entre sus moléculas por estar muy separadas entre sí. Esta hipótesis es adecuada a densidades muy bajas y presiones de 1 a 3 bar. En estas condiciones, la relación entre presión p , temperatura T y volumen V del gas es dada por $pV = N_m RT$, o $pv = RT$, donde N_m es el número de moles, $v = V/N_m$ es el volumen molar del gas y R es la constante de gases ideales cuyo valor numérico en el Sistema Internacional (SI) es $R = 8.314 \text{ J/mol}^\circ\text{K}$. En 1873 el físico holandés Johannes van der Waals postuló que la presión de un gas real debería ser la siguiente:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \Leftrightarrow \left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v-b) = RT; \quad v = \frac{V}{N_m} \quad (7)$$

Donde las constantes a y b son específicas de cada fluido; a mide la atracción entre moléculas y b es el volumen promedio sustraído del volumen molar por una mol de partículas. En el punto crítico del agua (y de cualquier otro fluido) las densidades de la fase líquida y de la fase vapor son idénticas. El punto crítico es un punto de inflexión en la isoterma crítica. Es decir, las derivadas de la presión con respecto al volumen molar se anulan: $dp/dv = d^2p/dv^2 = 0$. Esta propiedad matemática proporciona dos ecuaciones de las cuales se pueden calcular las constantes de van der Waals en términos de la presión y de la temperatura críticas del vapor:

$$a = \frac{27}{64} \frac{R^2 T_c^2}{p_c}; \quad b = \frac{RT_c}{8p_c} \quad (8)$$

La ecuación de estado (7) es cúbica con respecto al volumen molar:

$$p v^3 - (pb + RT)v^2 + av - ab = 0 \quad (9)$$

El problema teórico-práctico es que esta ecuación cúbica tiene tres raíces: v_1 , v_2 y v_3 . Es decir, al calcular el volumen molar v usando la ecuación (9) a presión y temperatura dadas, obtendremos tres valores numéricos distintos. El valor más pequeño corresponde a la fase líquida, mientras que la raíz mayor corresponde a la fase vapor. La raíz intermedia no tiene ningún significado físico, sino sólo numérico.

EL FACTOR Z DE COMPRESIBILIDAD DEL VAPOR

Como se dijo, el factor Z de compresibilidad del vapor es definido como el coeficiente de desviación entre el gas ideal y el gas real, dado en forma general por la ecuación (1), válida para todos los fluidos:

$$Z = \frac{p v}{R T} \quad (10)$$

De la ecuación de estado de van der Waals (7), deducimos que:

$$Z = \frac{v}{v-b} - \frac{a}{RTv} \quad (11)$$

Esta ecuación, junto con la (8), permiten el cómputo del factor Z en función de la presión y de la temperatura críticas del vapor.

Correlación para el factor Z útil para PPTv en pozos de vapor

Con una tabla con valores numéricos del factor Z , verificados en la página www.wolframalpha.com, y usando el software *Mathematica* versión 8 (Wolfram, 2012), construimos la siguiente correlación para $Z(p, T)$, que tiene el rango de validez $212.4 \leq T \leq 450^{\circ}\text{C}$ y $20 \leq p \leq 220$ bar:

$$Z(p, T) = 0.95115782784 - 0.00664086125 p - 3.70368391114 \times 10^{-8} p^3 + 0.0001150956332 T + 0.0000132895865 p T + 1.52046481158 \times 10^{-8} p^2 T + 0.0000022127265 T^2 - 5.90954955214 \times 10^{-9} T^3 \quad (12)$$

La Figura 2 muestra en una gráfica tridimensional el comportamiento de Z en el rango indicado.

REFERENCIAS

- Al-Hussainy, R., and H.J. Ramey, 1966. Application of Real Gas Flow Theory to Well Testing and Deliverability Forecasting. *Journal of Pet. Tech. Trans. AIME* 237, pp. 637-642.
- Bundschuh, J. and M.C. Suarez-Arriaga, 2010. *Introduction to the Numerical Modeling of Groundwater and Geothermal Systems – Fundamentals of mass, energy and solute transport in poroelastic rocks*. Vol. 2, Multiphysics Modeling Series, CRC Press - Taylor & Francis Group.
- Garg, S.K., 1980. Pressure Transient Analysis for Two-Phase (Water-Steam) Geothermal Reservoirs. *SPEJ*, pp. 206-214.
- Horne, R.N., 1995. *Modern Well Test Analysis - A computer-aided approach*. Petroway, Inc., 257 pp.
- Meunier, D., C.S. Kabir and M.J. Wittmann, 1987. Gas Well Test Analysis: Use of Normalized Pressure and Time Functions. *SPE Formation Evaluation*, pp. 629-636.
- Suárez-Arriaga, M.C., 2013. Análisis Matemático de Pruebas Transitorias de Presión - Aplicaciones prácticas con software avanzado usando *Mathematica* v. 8. Notas no publicadas del Seminario-Taller impartido a LaGeo, El Salvador, San Salvador, 1-5 de abril de 2013, 75 pp. Inédito.
- Suárez-Arriaga, M.C., y M.L. Ruiz, 2013. El extraño comportamiento de la compresibilidad del agua en reservorios de alta entalpía y su efecto en transitorios de presión bifásicos y de solo vapor. *Memorias del XXI Congreso Anual de la Asociación Geotérmica Mexicana*, 24-26 de octubre de 2006, Morelia, Mich.

Theis, C.V., 1935. The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground-water storage. *Transactions, American Geophysical Union* 16, pp. 519-524.

Wagner, W., and A. Pruss, 2002. The IAPWS Formulation 1995 for the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance for General and Scientific Use. *J. Phys. Chem. Ref. Data* Vol. 31, No. 2.

Wolfram, S., 2012. *Mathematica: A system for doing mathematics by computer*. Wolfram Research, Champaign, IL.

FIGURAS EN LA PÁGINA SIGUIENTE

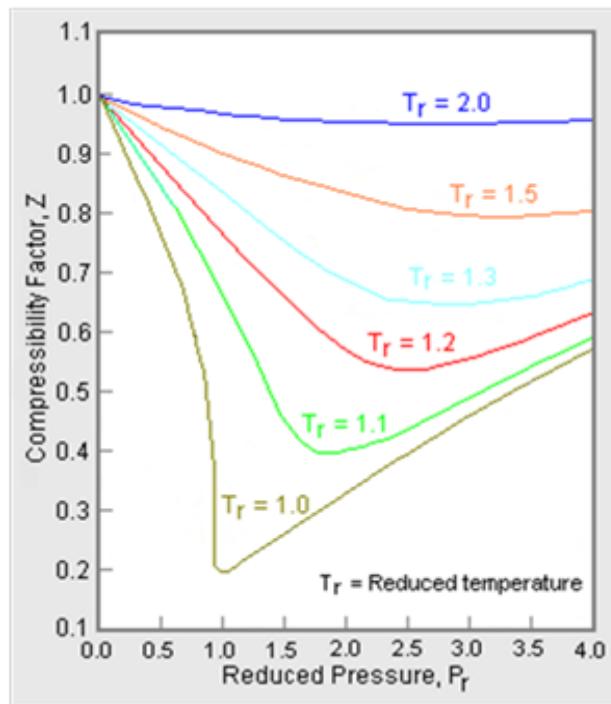


Figura 1. Gráfica generalizada del factor Z en función de (p_r, T_r) .
Cubre varios gases: metano, CO_2 , N_2 , propano, etileno, etano y
vapor de agua.

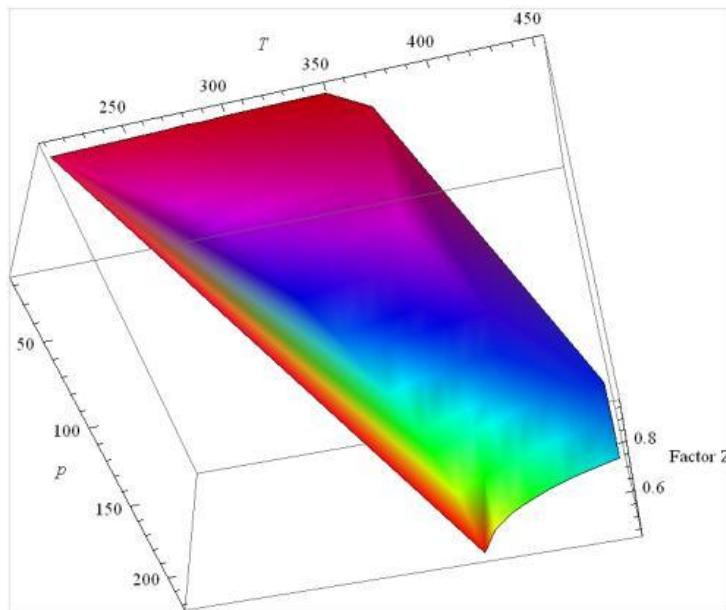


Figura 2. Gráfica tridimensional del factor Z para la fase vapor del agua. Abarca el rango termodinámico en presiones de 20 hasta 220 bar, y en temperaturas desde $212.4^{\circ}C$ hasta $450^{\circ}C$.